set 26-13:47

set 26-14:06

Argomenti di
Probabilità e Statistica
Springer
giuliano dm. unipi. it

Spazi di Probabilità
Uniformi

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω = spazio campione

= insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento

$\mathcal{A}$ = σ- algebra degli eventi

P = probabilità

$P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

Si lanciano 2 monete truccate
~~equilibrate~~ (= ~~non truccate~~)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$T \longrightarrow 1$

$C \longrightarrow 0$

- $\Omega = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Probabilità <u>condizionale</u>

Si estrae una p. da un'urna che contiene
10 palline numerate
1, 2, 3, ... 10

Calcolare la prob. di estrarre
un numero ≤ 5

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots 10\} \quad \text{card}\,\Omega < \infty$$

$$\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\Omega)}$$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{10} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$A = \{\text{esce un } n^\circ \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\rightarrow P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\Big) =$$

$$= \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} x =$$

$$= x\cdot(\mathrm{card}\,A) = \boxed{\frac{\mathrm{card}\,A}{\mathrm{card}\,\Omega}} =$$

set 26-14:36

Definizione. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è uno spazio di prob. **uniforme** se

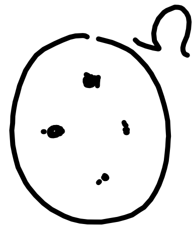
$$P(\{\omega\}) = x \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\mathrm{card}\,\Omega}} = \text{cardinalità di } \Omega =$$

$= n^\circ$ degli elementi di Ω

$\mathrm{card}\,\Omega < \infty$

$$P(\Omega)=1$$



$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) =$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} x = x\cdot(\mathrm{card}\,\Omega)$$

$$1 = x \cdot (\mathrm{card}\,\Omega)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\mathrm{card}\,\Omega}$$

$$A = \{(1,0),(1,1)\} =$$

$$= \{\text{esce "testa" al } 1^\circ \text{ lancio}\}$$

$$P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

set 26-14:20

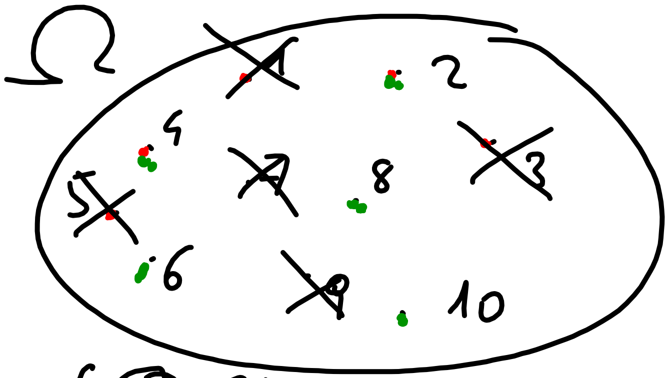
$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$A = \{1, \ldots 5\}$$

$$\Omega = \{1 \ldots , 10\}$$

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

→ E' uscito un n° pari



A

$\to B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$$\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}\, B} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\left(\dfrac{\text{card}\,(A\cap B)}{\text{card}\,\Omega}\right)}{\dfrac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Nello spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sono dati due eventi (= elementi di $\mathcal{A}$) A e B, con $P(B) > 0$

<u>Definizione</u>. Si chiama probabilità condizionale di A, dato B, il numero

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A|B$

$P(A)$

$$P(B)\,P(A) = \frac{P(A \cap B)}{\cancel{P(B)}}\,\cancel{P(B)}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definizione

Definizione. A e B si dicono <u>indipendenti</u> (tra loro) se

$$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si lancia 2 volte una moneta equilibrata.

$\rightarrow A =$ {esce "testa" al 1° lancio}

$\rightarrow B =$ {esce "testa" al 2° lancio}

$A \quad B \quad C$ sono indipendenti

se A e B sono indipend.; $\underline{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

$\underline{A \text{ e } C}$ . . . . $\underline{P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)}$

$\underline{B \text{ e } C}$ - - - - $\underline{P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)}$

$$\underline{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$$

set 26-15:07

Definizione A, B e C si dicono indipendenti se valgono tutte le condiz. seguenti:

$$\begin{cases} P(A\cap B) = P(A)P(B) \\ P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C) \\ P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C) \end{cases}$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$A = \{(1,1), (1,0)\}$
$B = \{(1,1), (0,1)\}$

$A \cap B = \{(1,1)\}$
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$\Omega = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(A) = \frac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega}$$

$$P(\{\underline{\omega}\}) = \frac{1}{\text{card}\, \Omega} = \frac{1}{4}.$$

<u>Definizione</u> Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di eventi. Si dice che $(A_i)_{i\in I}$ sono tra loro indipendenti se ogni sottofamiglia <u>finita</u> è costituita da eventi indipendenti

$A \ , B \ , C \ , D$

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$\vdots$

$P(A \cap B \cap C) =$
$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap B \cap D) =$
$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(D)$

$\vdots$

$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = \dots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1$$

$$\binom{3}{2}+\binom{3}{3} = 3+1 = 4$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \qquad A \quad B^c$$

Esercizio. Dimostrare che se A e B sono indipendenti, sono indipendenti anche

(1) A e B^c.

(2) A^c e B.

(3) A^c e B^c.

Dimostrazione. Devo vedere che

$$P(A \cap B^c) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B^c)$$

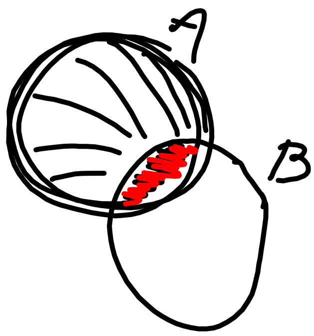
$$P(A \cap B^c) = P(A) - \underline{P(A \cap B)}$$

A e B sono indip.

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P(A)\left(1 - P(B)\right) =$$

$$= P(A)\, P(B^c)$$



Se (A_i) è una famiglia di eventi indipendenti, sostituendo alcuni di essi con i loro complementari si ottiene un'altra famiglia di eventi indipendenti

$A \quad B \quad C$

$\underline{A}^c \quad B \quad C$

$A \quad \underline{B}^c \quad C$

$A \quad B \quad \underline{C}^c$

$\underline{A}^c \quad \underline{B}^c \quad C$

$\underline{A}^c \quad B \quad \underline{C}^c$

$A \quad \underline{B}^c \quad \underline{C}^c$

$\underline{A}^c \quad \underline{B}^c \quad \underline{C}^c$

(Schema delle prove indipendenti)

Si lancia n volte una moneta per la quale è p $(0<p<1)$ la probabilità di ottenere la faccia "testa" in un generico lancio.

Costruire $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

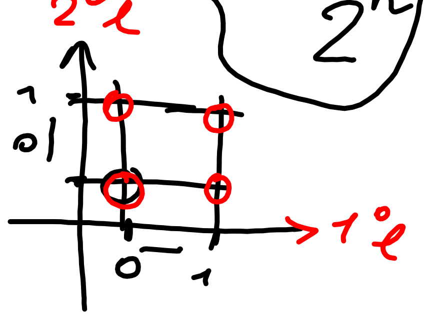
$\Omega = \{$ sequenze di lunghezza n costituite dai simboli 1 e 0 $\}$

$$(1,1,0,1,1,0) = \{0,1\}^n$$

$n = 6$

$\mathrm{card}\,\Omega = 2^n$

• $\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\} = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^2$



$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\cancel{P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1}{2^n}}$$

- $n = 5$
- $\omega = (1, 1, 0, 1, 0)$

set 26-15:38

$n = 5 \rightarrow \underline{\omega} = (1, 1, 0, 1, 0)$ | ω

- $A_1 = \{$esce "testa" al 1° lancio$\} = \{(1, \times, \times, \times, \times) \ldots\}$
- $A_2 = \{$ " " " 2° lancio$\} = \{(\times, 1, \times, \times, \times)\}$
- $A_3 = \{$ " " " 3° " $\} = \{(\times \times, 1, \times, \times)\}$
- $A_4 = \{$ " " " 4° " $\} = \{(\times, \times, \times, 1, \times)\}$
- $A_5 = \{$ " " " 5° " $\} = \{(\times, \times, \times, \times, 1)\}$

$$\{\omega\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c$$

$$P(\{\omega\}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \underline{A_3^c} \cap A_4 \cap \underline{A_5^c}) =$$

set 26-15:41

$$\overset{\text{ind.}}{=} \underline{P(A_1)}\,\underline{P(A_2)}\,P(A_3^c)\,P(A_4)\,P(A_5^c) =$$

$$\overset{P(A_i)=p}{=} p \cdot p\,(1-p)\,p\,(1-p) = p^3(1-p)^2$$

$$P(\{(1,1,\overset{\times}{0},1,\overset{\times}{0})\}) = p^{3}(1-p)^2$$

$$\omega = \underline{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)}$$

$$P(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}\omega_i}$$

$$\underline{\underline{P(\{\omega\})}} = p^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}\omega_i}$$

set 26-15:51

$$\underline{P(A)} = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) =$$

$$= \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \underline{\sum_{\omega \in A} p^{\sum_i \omega_i} (1-p)^{n-\sum_i \omega_i}}$$

$p = \frac{1}{3}$ $\quad n = 5$ lanci

$\omega = (1, 0, 1, 1, 0)$ $\quad \sum_i \omega_i = 3$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = p^{\sum_i \omega_i} (1-p)^{n - \sum_i \omega_i}$$

- $\Omega = \{0,1\}^n$

Schema delle prove indip

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $P(A) = \sum_{\omega \in A} p^{\sum_i \omega_i} (1-p)^{n - \sum_i \omega_i}$

Se $P(B)=0$

$$A \cap B \subseteq B$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{P(A\cap B)} \leq P(B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = 0$$

set 26-14:07

set 26-14:07

set 26-14:07